第 8 講　二項分布

PART1　二項分布

要点 ①　二項分布

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}\,(1-p)^{n-r}$$

であり，$1-p=q$ とおくと , この確率は

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}\,q^{n-r}\qquad (p+q=1)$$

と表される。

この反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると，X は 0，1，……，n の値をとる確率変数であり，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}\,q^{n-r}\qquad (r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

である。よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	${}_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_{n}\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	1

この表で与えられる確率分布を「　　　　　」という。二項分布は n と p の値によって定まり，　　で表す。またこのとき，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に「　　　」という。

※$X=0$，1，……，r，……，n のときの確率の総和は，二項定理より

$${}_{n}\mathrm{C}_{0}\,p^{0}\,q^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}\,p^{1}\,q^{n-1}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}\,q^{n-r}+\cdots\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}\,p^{n}\,q^{0}=(p+q)^{n}=1^{n}=1$$

であることが確認できる。

例　1 個のさいころを 3 回投げるとき，2 以下の目が出る回数を X とする。

1 回の試行で 2 以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この試行を 3 回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。

よって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)=\ \mathrm{C}\left(\quad\right)\left(\quad\right)\qquad (r=\qquad\qquad)$$

であり

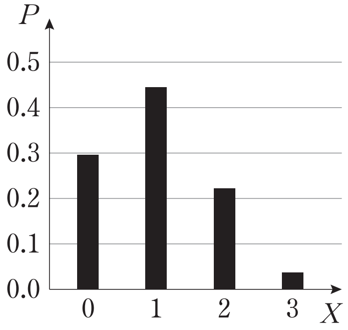
$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27},\qquad P(X=1)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{27},$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27},\qquad P(X=3)={}_3\mathrm{C}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

また，この確率分布をグラフで表すと右のようになる。



1 1枚の硬貨を4回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1) X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2) X の確率分布を求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$	……	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	……	${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$	1

この表で与えられる確率分布を「二項分布」といい，$B(n,\ p)$ で表す。

また，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う，という。

第 8 講　PART1 確認問題

1　1 から 4 までの数が 1 つずつ書かれた 4 個の球が袋の中に入っている。この中から 1 個取り出す試行を 3 回行う。ただし，取り出した球はもとに戻すものとする。1 が書かれた球を取り出した回数を X とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。答えは，下の①～④のうちから選べ。 ア

①　$B\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$　　②　$B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

③　$B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$　　④　$B\left(\frac{1}{4},\ 3\right)$

(2)　X の確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{\text{イウ}}{64}$	$\frac{\text{エオ}}{64}$	$\frac{\text{カ}}{64}$	$\frac{\text{キ}}{64}$	1

第 8 講　二項分布

PART1 二項分布

1　1枚の硬貨を4回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

[解答]

(1)　1回の試行で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

この試行を4回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

(2)　$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{4-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり

$$P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},\qquad P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$

$$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},\qquad P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16},$$

$$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** ア：③

[解説]

1回の試行で1が書かれた球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$

この試行を3回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。 [A]

[A]　1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(2)　**[正解]** イウ：27，エオ：27，カ：9，キ：1

[解説]

X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。

$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}$$ [B]

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率は，反復試行の確率の式より

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であり

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1